HAUPTACHSENTRANSFORMATION, EXPONENTIALFUNKTION

Wir betrachten noch einmal Tensoren und wenden uns dann Funktionen zu. Viele physikalische Phänomene werden durch wenige fundamentale Funktionen beschrieben. So tritt zum Beispiel bei allen Wachstumsprozessen die Exponentialfunktion auf.

[H19] *Maßellipsoid* **[$2+4+4+2+2=14$ Punkte]**

Für die Andromedagalaxie wurden die Flächen gleicher Sterndichte ermittelt, sie haben die Form

$$4x^2 + 3(y^2+z^2) + 2\epsilon x(y-z) - 2yz = 1\,,$$

wobei die Astronomen noch darüber debattieren, ob ϵ signifikant von Null verschieden ist.

(a) Welche Matrix M hat das obige Maßellipsoid? Das Maßellipsoid ist definiert als die Fläche, auf der die quadratische Form $Q(\vec{r}) = \underline{r}^{\mathsf{T}}\, M\, \underline{r} = 1$ ist.

(b) Betrachten Sie zunächst den Fall $\epsilon = 0$. Zerlegen Sie M in die Summe $\alpha\mathbb{1} - M'$ eines Vielfachen der Einheitsmatrix und $M' = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Geben Sie damit möglichst ohne Rechnung drei Hauptachsenrichtungen $\underline{g}_1, \underline{g}_2, \underline{g}_3$ normiert und als Rechtssystem an.

(c) Führen Sie für $\epsilon \neq 0$ das in der Vorlesung erklärte Verfahren zur Hauptachsentransformation durch und bestimmen so Eigenwerte und Eigenvektoren $\underline{f}_1, \underline{f}_2, \underline{f}_3$.

(d) Führen Sie für die Lösung aus (c) nun den Grenzwert $\epsilon \to 0$ aus und vergleichen Ihr Resultat mit dem aus (b). Welche Beobachtung machen Sie?

(e) Schreiben Sie den $\epsilon \to 0$ Limes der $\underline{f}$'s als Linearkombinationen der $\underline{g}$'s. Bilden die Koeffizienten dieser Linearkombinationen eine Drehmatrix?

[H20] *Schlittenfahrt* **[$3+3+2+2=10$ Punkte]**

Der Weihnachtsmann fährt mit seinem Schlitten einen Hang hinunter. Der Hang sei eine schräge Ebene mit Gefällewinkel α. Der Schlitten habe die Gesamtmasse m, und es wirke neben der Schwerkraft $\vec{F}_{\text{grav}} = -m\,g\,\vec{e}_z$ noch eine Reibungskraft, deren Betrag proportional zum Betrag der Geschwindigkeit ist, $|\vec{F}_{\text{reib}}| = R\,v(t)$, deren Richtung aber $\vec{v}$ entgegengesetzt ist. Das ist für einen Schlitten auf Schnee eine brauchbare Annahme. Zur Zeit $t=0$ habe der Schlitten die Anfangsgeschwindigkeit $v(0)=0$.

(a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung für $v(t)$ auf.

(b) Machen Sie einen Ansatz $v(t) = a\,\mathrm{e}^{b\,t} + c$ und bestimmen Sie aus Anfangsbedingung und Bewegungsgleichung die Parameter a, b, c.

(c) Skizzieren Sie $v(t)$. Welche maximale Geschwindigkeit ergibt sich?

(d) Leiten Sie aus dem gefundenen $v(t)$ das bekannte Resultat für den reibungsfreien Fall $R \to 0$ her.

Hinweis: Die Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$ zeigt entlang der schrägen Ebene. Da es immer nur in diese eine Richtung geht, sind wir nur am Betrag $v(t)$ interessiert, so dass das Problem eindimensional ist.

[H21] *Populationswachstum* **[$3+3+3+3=12$ Punkte]**

In einem afrikanischen Nationalpark leben zur Zeit $t=0$ eine Anzahl von $N(0) = N_0$ Elefanten. Die Populationsstärke wird durch die „Bewegungsgleichung“ $\dot{N} = G\,N - S\,N$ bestimmt, wobei die Geburtenrate G und die Sterberate S im allgemeinen komplizierte Funktionen sämtlicher Umwelteinflüsse sind. Vereinfachend wollen wir annehmen, dass S konstant, aber G proportional zum Bestand an Futterpflanzen ist. Dieser Bestand an Futterpflanzen nehme linear mit der Gesamtzahl der Elefanten ab, also $G = G_0 - \beta N$. Setzt man nun noch praktischerweise $\alpha = G_0 - S > 0$, so wird unser extrem vereinfachtes Wachstumsmodell durch

$$\dot{N} = \alpha N - \beta N^2$$

beschrieben.

(a) Definieren Sie $y(t) = 1/N(t)$ und schreiben Sie die Differentialgleichung in eine für $y(t)$ um.

(b) Machen Sie für $y(t)$ einen Ansatz $y(t) = a\,\mathrm{e}^{b\,t} + c$ ähnlich zum Vorgehen in [H20], und bestimmen Sie aus der Anfangsbedingung und der Bewegungsgleichung die freien Parameter.

(c) Was ergibt sich demnach für $N(t)$? Skizzieren Sie die Lösung. Welche Sättigungswerte ergeben sich für $N(t\to\infty)$ und $G(t\to\infty)$?

(d) Was ergibt sich im Grenzwert $\beta \to 0$, und was bedeutet dieser Grenzwert?

Bitte wenden!

[C3] *Trägheitstensor II* **[4 + 5 + 12 + 12* = 21 Computerpunkte + 12* Extracomputerpunkte]**
Dies ist die dritte Computerübung. Bitte beachten Sie unbedingt die Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe von Computerübungen in Abschnitt 5 der Informations-Seiten zur Vorlesung im Stud.IP, den Sie im Kapitel „Abgabe von Übungen" finden. Die Computerübung ist in *Python* zu lösen. Ihre Lösung dokumentieren und kommentieren Sie bitte ausführlich in einem Jupyter-Notebook.

In dieser Übung sollen Sie mit Python ein Verfahren implementieren, das für N Massepunkte mit Massen m_α an Positionen $\vec{r}_\alpha$ den Trägheitstensor berechnet und anschließend auf Hauptachsenform bringt.

(a) Verwenden Sie als Eingabe zwei Listen mit jeweils N Elementen. Die erste enthält die Massen, die zweite die Positionsvektoren. Da der Trägheitstensor im Allgemeinen auf den Schwerpunkt des Systems bezogen ist, schreiben Sie zuerst eine Prozedur, die den Schwerpunkt berechnet:

$$\vec{R} = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{r}_\alpha \qquad \text{mit} \qquad M = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \,.$$

(b) Programmieren Sie nun den Trägheitstensor $\hat{I}$, definiert durch die Komponenten I_{ij} seiner zugehörigen Matrix I,

$$I_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \left((\vec{r}\,'_\alpha)^2 \, \delta_{ij} - x'_{\alpha,i} x'_{\alpha,j} \right) \,,$$

wobei $x'_{\alpha,i}$ die i-te Komponente der um die Position des Schwerpunktes verschobenen Position $\vec{r}_\alpha = \vec{r}\,'_\alpha - \vec{R}$ ist. Definieren Sie dafür zunächst eine Funktion `KroneckerDelta`, die Sie dann für den Trägheitstensor verwenden.

(c) Überprüfen Sie Ihr Programm an Hand folgender drei Beispiele. Geben Sie auch die Eigenwerte λ_i (die Hauptträgheitsmomente) und Eigenvektoren $\vec{v}_i$ (die Hauptachsen) des Trägheitstensors an. Setzen Sie im Folgenden $m = 1$ und $a = 1$.
Hinweis: Die Hauptachsentransformation erledigt das Kommando `numpy.linalg.eig` für Sie.

(1.) Vier Massepunkte gleicher Masse m an den Koordinaten $\vec{r}_1 \doteq (0,0,0)^\intercal$, $\vec{r}_2 \doteq (1,0,0)^\intercal$, $\vec{r}_3 \doteq (0,1,0)^\intercal$, $\vec{r}_4 \doteq (1,1,0)^\intercal$, ein Massepunkt der Masse $m/2$ bei $\vec{r}_5 \doteq (1/2,1/2,1)^\intercal$ und ein Massepunkt der Masse $2m$ bei $\vec{r}_6 \doteq (1/2,1/2,-1)^\intercal$.

(2.) Vier Massepunkte gleicher Masse m an den Koordinaten $\vec{r}_1 \doteq (a,a,a)^\intercal$, $\vec{r}_2 \doteq (a,-a,a)^\intercal$, $\vec{r}_3 \doteq (-a,a,a)^\intercal$, $\vec{r}_4 \doteq (-a,-a,a)^\intercal$, und vier Massepunkte gleicher Masse $2m$ an den Koordinaten $\vec{r}_5 \doteq (a,a,-a)^\intercal$, $\vec{r}_6 \doteq (a,-a,-a)^\intercal$, $\vec{r}_7 \doteq (-a,a,-a)^\intercal$, $\vec{r}_8 \doteq (-a,-a,-a)^\intercal$.

(3.) Sieben Massepunkte gleicher Masse m, die mittels `random.random` zufällig im würfelförmigen Bereich $[-1,1] \times [-1,1] \times [-1,1] \subset \mathbb{R}^3$ gewählt werden. Verwenden Sie Ihre Matrikelnummer, um den Zufallsgenerator mit `random.seed` zuvor zu initialisieren. Geben Sie diesmal auch die Positionen der Massepunkte aus.
Hinweis: Offensichtlich müssen Sie hierfür das entsprechende Modul mittles `import random` zunächst laden.

(d*) Visualisieren Sie Ihre Ergebnisse in dreidimensionalen Plots, in denen die Massenpunkte und die dazugehörigen Hauptträgheitsachsen eingezeichnet sind. Skalieren Sie das Volumen der Massenpunkte proportional zu deren Masse m und die Länge der Hauptträgheitsachsen proportional zu $1/\sqrt{\lambda_i}$ (Warum? Siehe hier). Die Hauptträgheitsachsen sollten vom Schwerpunkt des Systems ausgehend eingezeichnet sein.
Hinweise: Wenn das Volumen V proportional zur Masse m sein soll, so bedeutet das, dass der Radius (also die Größe, die man im Plot für die Massenpunkte einstellt) wegen $m \propto V \propto r^3$ mit $m^{1/3}$ skaliert werden muss. Für dreidimensionale Plots müssen Sie neben `matplotlib.pyplot` auch aus dem Modul `mpl_toolkits.mplot3d` das Submodul `Axes3D` importieren. Um einen dreidimensionalen Plot zu erhalten, müssen Sie danach bei der Erstellung der Achsen so etwas wie z.B. `ax = fig.add_subplot(111, projection="3d")` schreiben. Verwenden Sie für die Darstellung der Massepunkte am besten einen `scatter` Plot und für die Hauptträgheitsachsen einen `quiver` Plot. Achten Sie wie immer auf eine aussagekräftige Darstellung. Denken Sie also an sinnvolle Darstellungsbereiche, korrekte Achsenbeschriftungen, gut erkennbare Farbgebung usw.

[!] *Ausführung* **[6 Punkte]**
Mit insgesamt 6 Punkten wird die Ausführung der Lösung insgesamt bewertet, also Leserlichkeit, Vollständigkeit der Rechenwege, Ausführlichkeit der Kommentare zum Lösungsweg usw.

HINWEIS: Name, Matrikelnummer und Übungsgruppe angeben! Lösungen nur als PDF!